



## Optique et guidage des faisceaux

J.M. de Conto

### ► To cite this version:

J.M. de Conto. Optique et guidage des faisceaux. Ecole IN2P3 sur les Accélérateurs, Nov 2002, Benodet, France. pp.1-39. in2p3-00012015

**HAL Id: in2p3-00012015**

**<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00012015>**

Submitted on 6 Nov 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ***Optique et guidage des faisceaux***

Rapport ISN 02-51

Jean-Marie De Conto  
Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble  
[deconto@isn.in2p3.fr](mailto:deconto@isn.in2p3.fr)  
octobre 2002

# 1 Introduction

Nous proposons ici une initiation au transport (au guidage) des particules. Les méthodes utilisées sont celles de l'optique géométrique classique, d'où cette appellation d'optique des particules chargées que l'on trouve parfois. Cette appellation n'est d'ailleurs aucunement abusive car les deux disciplines se basent sur le même principe de base, dit « d'action », ou « de moindre action ». Nous ne rentrerons pas dans ces finesses par ailleurs très intéressantes, nous nous cantonnerons à une description de la discipline.

Ce cours s'adresse à un public cultivé mais non spécialisé, ni habitué à la pratique des calculs compliqués. On suppose également que ce public possède une expérience et une vision pratique des choses.

Dans cette logique, en limitant les calculs à quelques formules utiles, nous déroulerons le cours comme suit :

Le cours sera articulé dans une certaine mesure autour d'une ligne de transport de faisceau expérimentale, conçue pour l'ex-projet PIAFE, et qui devait montrer la faisabilité d'un transport supposé délicat. L'exemple nous semble pertinent car il soulève et résout certaines difficultés. Il permettra également, tout au long du cours, d'illustrer les formules et les propriétés, mais aussi de donner des ordres de grandeur.

Des notions de base seront données : forces, rayon de courbure, potentiel, énergie et unités.

Toute conception se fait dans un cadre approprié que nous définirons, avec les notions de particule et trajectoire de référence. On devra ensuite définir en quoi une particule diffère de la particule idéale de l'axe de référence, ce qui conduit directement au concept d'émittance et à l'obligation d'utiliser des éléments de focalisation tels que quadripôles<sup>1</sup>, lentilles électrostatiques ou autres.

La modélisation de bon nombre de systèmes peut se faire, avec une excellente précision, à l'aide de lentilles minces. Nous en regarderons donc les propriétés et quelques assemblages, comme le système périodique « FODO », sur une particule mais aussi sur l'émittance, avec la notion d'adaptation et celle de stabilité.

La réalisation optique sera le thème du chapitre suivant, où nous passerons en revue la définition, le fonctionnement, les grandeurs caractéristiques des éléments de focalisation. Nous regarderons également le domaine d'utilisation.

Nous considérerons enfin les éléments de déviation, qui sont également utilisés à des fins d'analyse.

En annexe, nous donnons quelques fiches illustrant des points particuliers que nous n'étudions pas en détail, comme l'alignement et la définition du vide requis.

---

<sup>1</sup> L'usage utilise souvent "quadrupôle". Nous faisons le choix délibéré du terme français pour être "tendance", mais le fonctionnement d'un "qpôle" s'en moque quelque peu.

## **Problème**

Transporter des ions de masse 130 monochargés, d'énergie 30 keV, sur 400 mètres, en minimisant les pertes notamment par échange de charge.

A l'évidence, il nous manque un certain nombre d'éléments. Nous allons passer en revue ce qui est nécessaire au traitement de ce problème.

## **2 Notions de base**

Nous utilisons le système d'unités légal, à savoir le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le volt, le tesla. Nous dérogeons sur un seul point : pour l'énergie nous utilisons l'électron volt, qui vaut  $1.6 \cdot 10^{-19}$  joules, qui est une unité commode.

### *2.1 Force électrique et magnétique*

Une particule chargée de charge  $q$  possédant une vitesse  $v$  subit une force dite de Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où  $v$  est la vitesse de la particule,  $E$  le champ électrique et  $B$  le champ magnétique.

- La force électrique due à  $E$  est dans le sens de  $E$ . Cette force est utilisable pour accélérer ou pour dévier les particules (focalisation).
- La force magnétique est perpendiculaire au plan vitesse/champ. Elle ne peut donc pas servir à accélérer, mais seulement à dévier (focalisation, déviation dans le cas d'un dipôle). Elle est définie par la règle des trois doigts de la main droite.

### *2.2 Energie d'une particule*

L'énergie cinétique d'une particule vaut, pour une particule très en deçà de la vitesse de la lumière  $c$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Quand on approche de la vitesse de la lumière, la forme est plus compliquée et fait appel à la relativité restreinte. On pose :

$$\mathbf{b} = \frac{v}{c}$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{b}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Et alors :

$$E = \mathbf{g}m_0c^2 \text{ est l'énergie totale}$$

$$T = E - m_0c^2 = (\mathbf{g} - 1)m_0c^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{quand } v \ll c$$

La quantité  $m_0$  est la masse classique, dite « au repos », de la particule. Quand on est loin de la vitesse de la lumière, on a  $\gamma \sim 1$ .

### 2.3 Potentiel électrique et énergie cinétique

Une particule de charge  $q=ne$  (où  $n$  est le nombre de charges et  $e$  la charge de l'électron) acquiert, quand elle est accélérée sous une différence de potentiel  $V$  (en valeur absolue), l'énergie cinétique :

$$\Delta T = qV = neV$$

L'unité d'énergie est le joule, mais nous lui préférons l'électron-volt qui est l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré sous 1 volt. De manière plus concrète :

- Un électron accéléré sous  $V=300$  V ( $n=1$ ) :  $T = 300$  eV
- Un ion carbone (12 nucléons) de charge  $4+$  accéléré sous  $9$  kV :  $T=36$  keV soit  $3$  keV par nucléon.
- Un électron accéléré sous  $1$  V a pour énergie, dans le système légal :  $E=1.e.1=e=1.6 \cdot 10^{-19}$  joules donc  $1\text{eV}=1.6 \cdot 10^{-19}$  joules.

### 2.4 Quantité de mouvement

Elle est définie par :

$$\vec{p} = \mathbf{g}m_0\vec{v} \equiv m\vec{v}$$

## 2.5 Lois de conservation

Si le module de la vitesse ne varie pas, l'énergie cinétique ainsi que le module de la quantité de mouvement ne varient pas. Seul un champ électrique peut les modifier.

*Exemple :* Si la particule arrive avec une vitesse dans le plan de la feuille, s'il n'y a qu'un champ magnétique perpendiculaire à la feuille, alors :

- l'accélération est perpendiculaire à la vitesse et la trajectoire de la particule est un cercle.
- l'énergie cinétique et le module de la quantité de mouvement sont constants.

L'énergie cinétique est entièrement déterminée par l'équipotentielle sur laquelle se trouve la particule.

## 2.6 Rigidité magnétique

Revenons sur notre exemple du cercle du paragraphe 2.5. Soit une particule de vitesse  $v$  dans le plan de la feuille. Soit  $B$  l'intensité du champ magnétique supposé perpendiculaire à la feuille. Alors la trajectoire de la particule est un cercle dans le champ de la feuille et dont le rayon  $\rho$  vaut :

$$\rho = \frac{mv}{qB} = \frac{gm_0v}{qB}$$

La quantité :

$$\frac{mv}{q} = Br$$

est appelée rigidité magnétique de la particule (ou « Béro »).

Autrement dit, la rigidité magnétique est le rayon de giration d'une particule placée dans un champ de 1 tesla.

## 2.7 Exemples numériques et ordres de grandeur.

- Rigidité d'un électron de 6 GeV (ESRF) : 20 T.m  
Rayon de courbure dans un champ de 1 (resp. 2) teslas: 20 (resp. 10) mètres. Vitesse:  $0.9999999965 c \sim 3 \cdot 10^8$  m/s.
- Rigidité d'un ion monochargé de masse 130 accéléré sous 30 kV : 0.28 Tm environ (pour une énergie de 30 keV). Vitesse : 212 km/s.
- Rigidité d'un ion carbone de 400 MeV par nucléon soit 4800 MeV au total : environ 6.3 Tm. Vitesse  $2 \cdot 10^8$  m/s environ.

On considère rarement la vitesse proprement dite. On compare plutôt l'énergie au repos (le fameux  $m_0c^2$ ), exprimée en électrons-volts, à l'énergie cinétique.

*Exemples :* L'énergie au repos d'un électron est de 0.5 MeV, celle d'un proton d'environ 1 GeV. Il s'ensuit que :

- un électron accéléré sous 1MV est « relativiste » ( $v \sim c$ ). Plus précisément, sa vitesse vaut 94% de celle de la lumière.
- un proton accéléré sous 1MV n'est pas du tout relativiste ( $v \ll c$ ). Sa vitesse vaut en fait 4.7% de celle de la lumière.

### **3 Repérage des particules**

Le calcul d'un accélérateur peut, en résumé, se faire en plusieurs temps :

- Définition d'une trajectoire « centrale » de référence (« axe » de la machine), de forme tout à fait quelconque. Dans un anneau, ou dans une ligne de transport de faisceau, il s'agira d'un ensemble de sections droites et d'arcs de cercles. Elle peut être plus compliquée (injection axiale des cyclotrons). Elle se fait au choix du concepteur.
- Choix d'une particule de référence. Elle se déplace sur la trajectoire centrale et sert de référence en temps et en position.

A ce stade, il n'y a pas besoin d'autre chose que d'aimants de courbure et d'une chambre à vide pour transporter cette particule de référence, mais en réalité, un faisceau est constitué de particules différentes mais voisines de la particule de référence. Celles-ci ont notamment une direction différente et vont par conséquent diverger si on ne les contrôle pas. C'est que qui entraîne la nécessité de focaliser et définit l'émittance du faisceau.

Toute particule sera donc définie (repérée) par sa position par rapport à la particule de référence et sa direction par rapport à la trajectoire de référence.

On a ainsi (voir figure) 3 coordonnées spatiales ( $x, y, \Delta L$ ). La coordonnée  $\Delta L$  peut être exprimée en degrés si l'on a une accélération radiofréquence.

On ajoute les composantes de la vitesse ou, plus exactement, les inclinaisons :

$$x' = \frac{v_x}{v}$$

$$y' = \frac{v_y}{v}$$

Enfin, la particule n'ayant pas l'énergie nominale, on considère sa *quantité de mouvement relative*  $\Delta p/p_0$ .

Une particule sera donc repérée par 6 coordonnées, dans l'ordre :

$$(x, x', y, y', \Delta L, \Delta p/p_0)$$

Les quatre premières coordonnées sont les coordonnées transverses, les 2 dernières sont les longitudinales.

*Conditions de Gauss* : On supposera que ces coordonnées restent petites (ce ne sont que des écarts). Notamment, leurs carrés (ou puissances supérieures) seront négligés. Ceci implique également que la composante de vitesse selon  $s$  sera supposée égale à la vitesse totale. Les angles sont petits et égaux à leur tangente (ou leur sinus).

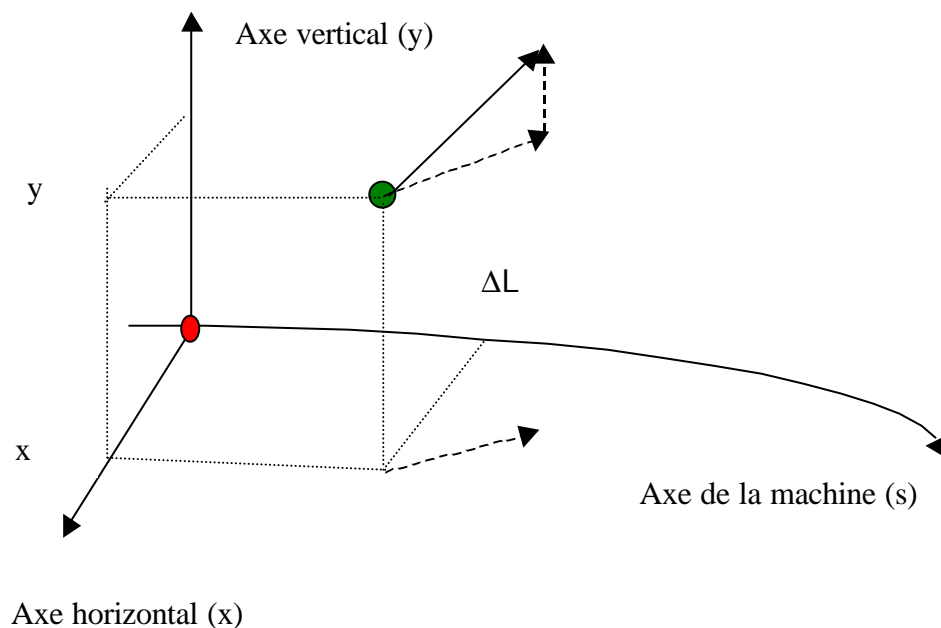


Figure 1

Nous pourrions parfois supposer que le mouvement est indépendant selon  $(x, x')$ ,  $(y, y')$  et l'espace longitudinal.

Nous avons parlé de 3 temps pour le calcul. On a un dernier temps qui est la définition et le calcul de la focalisation. Comme nous l'avons vu, une particule ayant une vitesse différente (notamment en direction) de la référence va diverger si on ne la contrôle pas. Comme nous n'allons pas étudier chaque particule, nous allons maintenant donner un moyen de traitement global.



#### 4 Le faisceau réel. Emittance et évolution.

Nous travaillons exclusivement dans  $(x, x')$ . On suppose que la description dans  $(y, y')$  est indépendante mais similaire. Nous ignorons le longitudinal et supposons qu'il évolue indépendamment et sans nous poser de problème.

L'ensemble des particules est illustré figure 2. A gauche, vu de côté (on suppose les vitesses de même module) et à droite vu dans le *plan de phase*  $(x, x')$ .

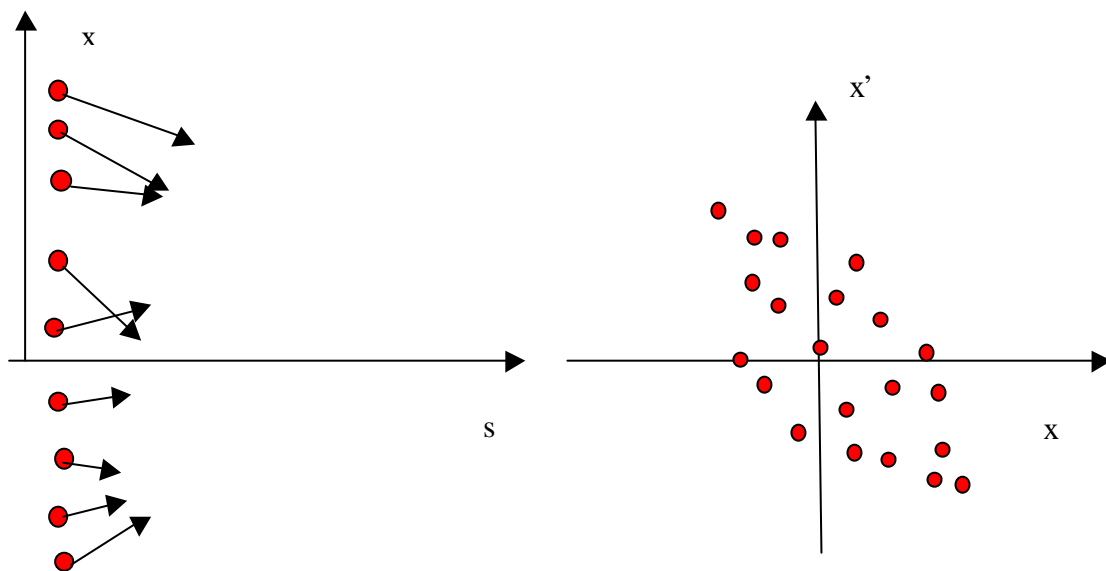


Figure 2

##### *Evolution*

On suppose que l'espace est sans champ (pas de forces). L'évolution se trace aisément sur la partie gauche et donne la figure 3. On y voit immédiatement un certain nombre de notions :

- la notion d'enveloppe, qui englobe l'ensemble des trajectoires. Plutôt que les trajectoires individuelles, c'est cette notion qui nous importe.
- la notion de minimum (ou en général d'extremum) d'enveloppe, ou « waist » (« col » ou « ceinture » en français).

La figure 2, dans sa partie droite, nous suggère donc de donner une description globale des particules. Nous allons le faire à travers la notion d'ellipse d'émittance.

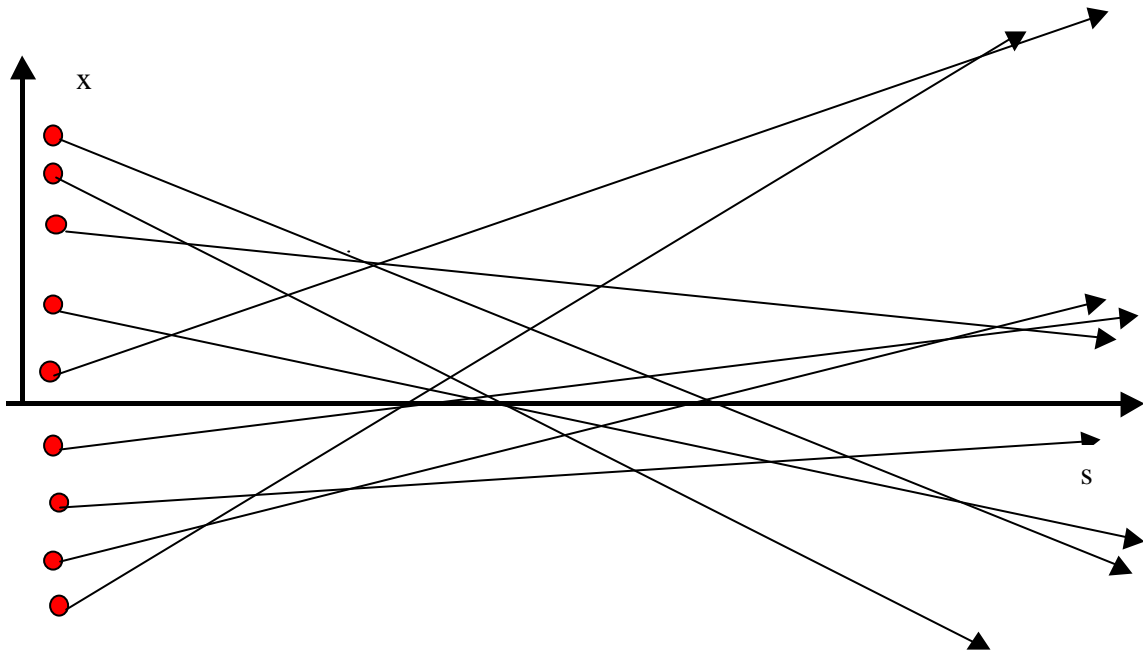


Figure 3

*Définition* : L'émittance est l'ellipse qui encadre au mieux les particules dans le plan de phase (figure 4).

- cette définition intuitive a en fait un sens mathématique précis (émittance dit quadratique moyenne ou RMS).
- elle englobe tout ou partie (ex : 95%) des particules.
- elle donne une aire dans  $(x, x')$  appelée également « émittance » mais aussi une forme qui caractérise la dimension du faisceau ainsi que sa divergence.

Elle est définie par 4 paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$  tels que :

- Aire de l'ellipse :  $A = \pi \epsilon$
- Dimension et divergence maximales :

$$x_{\max} = \sqrt{\beta \epsilon}$$

$$x'_{\max} = \sqrt{\gamma \epsilon}$$

En fait, les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  sont reliés par :

$$\beta \gamma - \alpha^2 = 1$$

Nota : Equation de l'ellipse :

$$bx'^2 + 2axx' + gx^2 = e$$

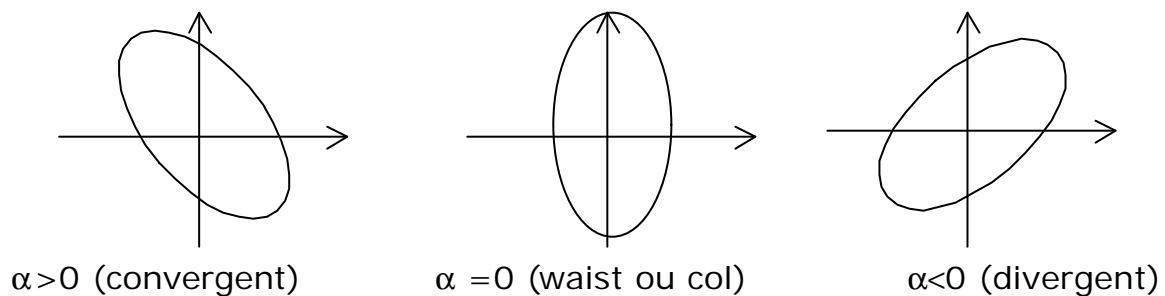
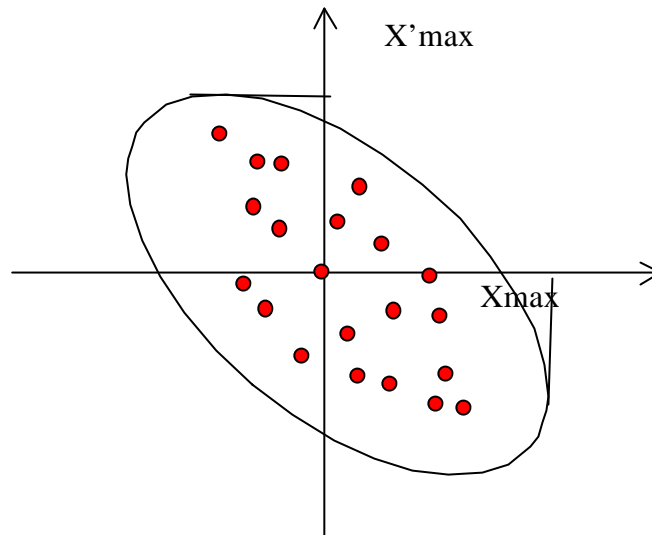


Figure 4

Les cas  $\alpha > 0$ , nul ou négatif correspondent aux parties gauche, centrale et droite de la figure 3.

**Théorème de Liouville** : La quantité  $\varepsilon$  varie comme l'inverse de la quantité de mouvement.

*Corollaire 1* : l'émittance diminue avec l'accélération.

*Corollaire 2* : l'émittance n'est jamais nulle (sauf si elle est nulle au départ ce qui supposerait n'accélérer qu'une particule !).

*Corollaire 3* : la dimension transverse et la divergence d'un faisceau ne sont jamais nulles.

## 5 Notions d'optique et applications

### 5.1 Lentille mince

*Définition* : une lentille mince est un élément de longueur nulle qui donne une déviation angulaire proportionnelle à la position sans changer cette dernière.

$$x_1 = x_0$$

$$x'_1 = x'_0 \pm \frac{x_0}{f}$$

$f$  est la distance focale de la lentille (position de son foyer). On a un signe « moins » quand la lentille est convergente.

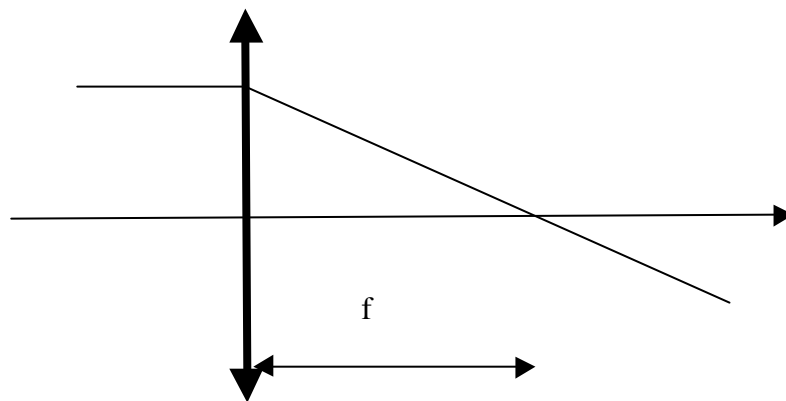


Figure 5

La figure 5 donne la signification de  $f$ , qui apparaît quand on arrive avec un angle nul. Le faisceau croise alors l'axe à une distance  $f$  en aval.

*Nota* : la lentille mince est l'élément dessiné en gras. Il ne s'étend pas jusqu'au foyer. A celui qui trouverait cette remarque triviale, nous ferons remarquer que c'est une erreur courante.

*Propriété* : Deux lentilles minces séparées par un espace sans champ, de même distance focale mais l'une étant divergente et l'autre convergente, forment un ensemble convergent. C'est cette propriété qui expliquera pourquoi une lentille électrostatique est convergente.

## 5.2 Structure FODO. Oscillation bétatron. Stabilité.

Revenons à notre problème de ligne de transport. Nous verrons plus loin qu'un quadripôle est divergent en y quand il est convergent en x (et réciproquement). Il est évident que l'on ne peut conduire un faisceau avec uniquement des lentilles divergentes. On doit donc alterner les vergences pour avoir une structure globalement convergente (stable).

Nous aurons donc une structure selon x par exemple du type « Convergent, Espace sans champ, Divergent, Espace sans champ » répétée *ad libitum* ou *ad nauseam usque* selon les goûts (selon moi, ce sera *a piacere*). Cette structure périodique sera dite FODO.

La figure 6 représente la trajectoire d'une particule dans une telle structure quand  $f$  est grande, c'est-à-dire quand la focalisation est faible. Ici,  $f$  est égale à quatre fois la distance entre lentilles (nous noterons  $f=4L$ ). La particule oscille autour de l'axe avec une amplitude ici assez large, et quasiment sinusoïdale (« pseudo-harmonique »). Cette oscillation s'appelle « oscillation bétatron ».

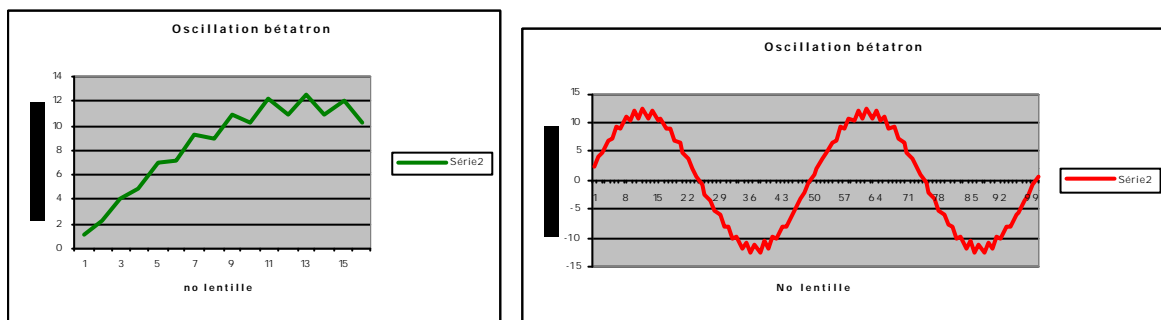


Figure 6

Nous voyons qu'il faut 50 lentilles pour assurer une seule oscillation, soit 360 degrés. Cette focalisation est **trop** faible.

La figure 7 est réalisée pour  $f=L$ . On s'aperçoit que le mouvement est moins sinusoïdal et que l'on a besoin de 12 lentilles, soit 3 périodes ou « mailles » pour une oscillation. On dit que l'on a « 60 degrés de progression de phase bétatron par maille ».

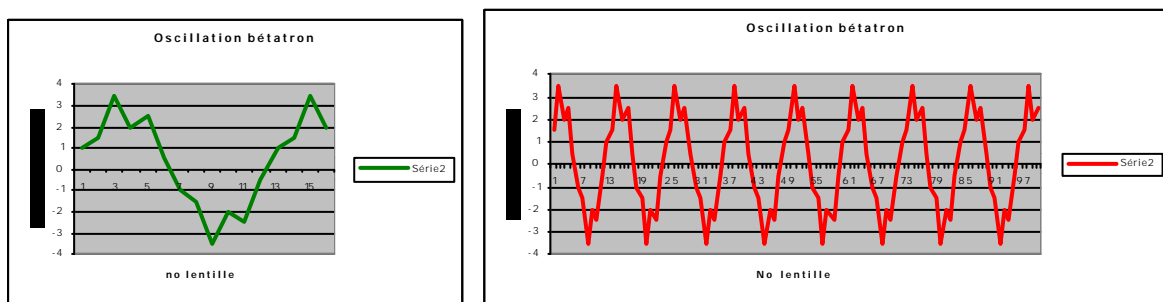


Figure 7 :  $f=L$

On peut voir ce qui se passe pour des lentilles plus fortes. Les figures 8 et 9 donnent les trajectoires pour  $f=L/2$ . L'échelle de l'ordonnée a fortement changé. Le mouvement devient instable. Cette valeur particulière est la limite et correspond à une oscillation pour 2 mailles, soit 180 degrés par maille.

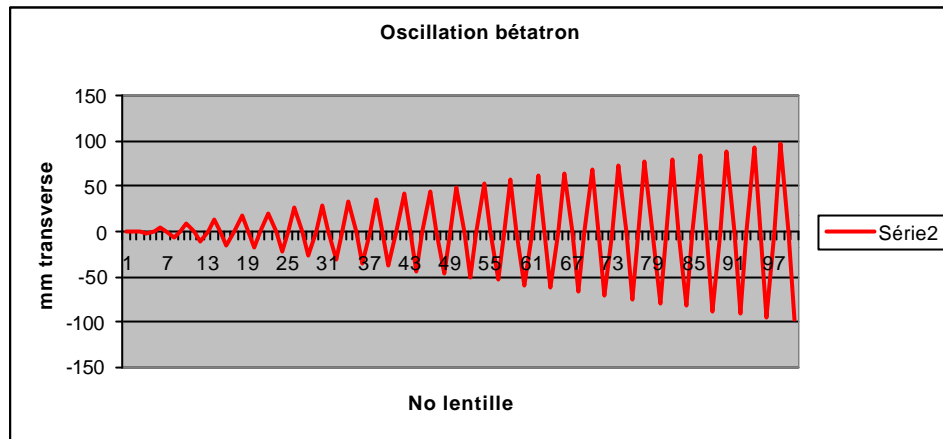


Figure 8 :  $f=L/2$

La figure 9 est donnée pour une valeur de  $f$  à peine plus faible ( $f=L/2.03$ ). L'oscillation diverge instantanément (voir les graduations !). On peut montrer qu'elle est exponentielle.

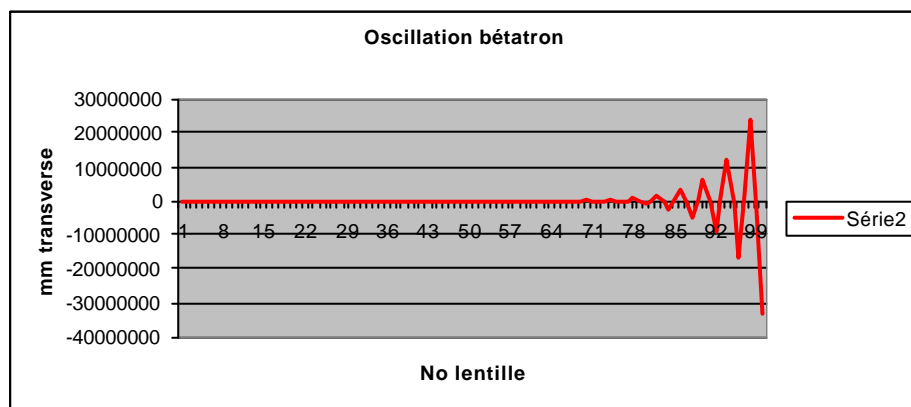


Figure 9 :  $f=L/2.03$

### 5.3 Une solution à notre problème de transport

Nous retenons donc assez logiquement une valeur  $f=L$  pour notre problème. Notre faisceau est de faible rigidité magnétique (voir le début du cours). Il est donc sensible au champ magnétique terrestre ( $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ). Il faut donc une structure de focalisation assez dense. Pour cette raison, nous choisirons  $L=1.5 \text{ m}$ . Il en découle  $f=1.5 \text{ m}$ .

#### 5.4 Transport d'émittance.

Nous nous sommes peu souciés des aspects d'enveloppe, et n'avons considéré qu'une seule particule. Ce n'est que maintenant que nous devons nous en préoccuper.

Le paramètre  $\varepsilon$  est donné par la source de particules. Nous n'y pouvons rien. Il est immuable (Théorème de Liouville). Par contre les paramètres de taille  $\beta$  et de divergence  $\gamma$  peuvent être adapté par une structure optique amont (que nous ne donnerons pas). Y a-t-il un choix optimal ? Nous le montrons par des illustrations.

La figure 10 donne les enveloppes verticale (partie supérieure) et horizontale (partie inférieure) de notre structure FODO quand la taille du faisceau est inadaptée. La figure 11 les donne quand la divergence est inadaptée.

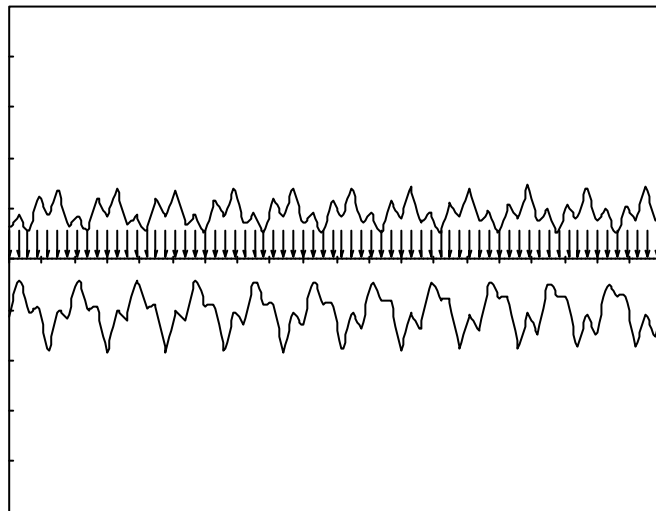


Figure 10 (les flèches représentent les lentilles)

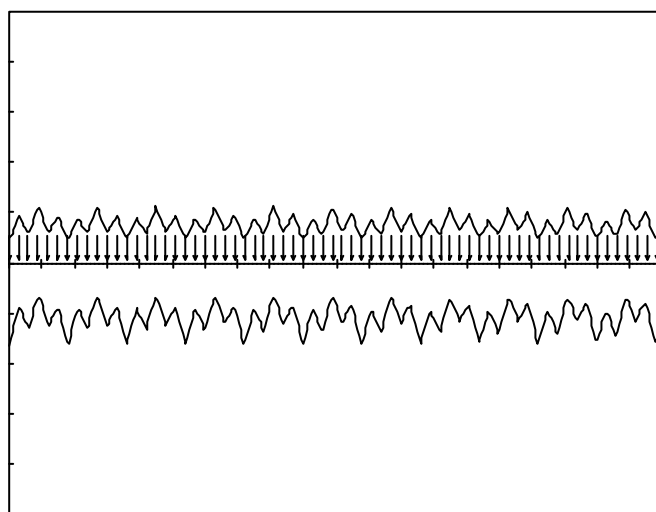


Figure 11

On constate (cela se démontre), qu'il existe un couple optimal de dimension/divergence qui minimise les oscillations. Ceci est représenté

figure 12. On dit que *l'émittance est adaptée*. Ceci est un réglage amont qui doit être effectué pour minimiser l'amplitude de l'enveloppe.

Nota : ceci n'a de sens que pour les structures périodiques.

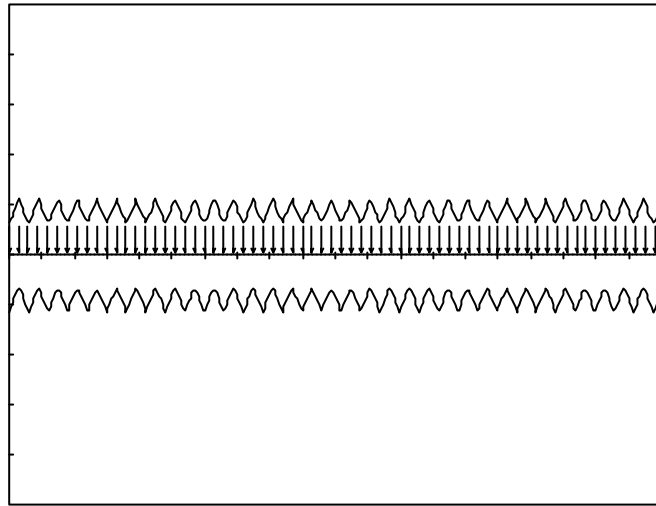


Figure 12 : Adaptation d'émittance.

*Remarque* : Pour  $\varepsilon$  donné, la dimension du faisceau adapté varie comme la racine carrée de la longueur de la maille et comme celle d' $\varepsilon$  quand le nombre d'oscillations par maille est constant.



## 6 Les éléments de focalisation

### 6.1 Lentille électrostatique

Nous donnerons un seul exemple. Les autres se généralisent aisément.

Nous considérons deux cylindres coaxiaux et de même diamètre, portés respectivement aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . La structure et les équipotentielles sont données figures 13a et 13b. L'axe optique est l'axe des cylindres.

Dans le cas de notre exemple, nous supposons que la lentille a un effet accélérateur. Le champ est localisé autour de l'intervalle (« gap ») qui sépare les cylindres et c'est là que se produit la focalisation. Comme les équipotentielles (figure 13b) sont courbées, le champ accélérateur (perpendiculaire aux équipotentielles) présente alors une composante longitudinale et une composante transverse. La partie située à gauche du gap produit (ici) un effet convergent alors que la partie droite produit un effet divergent de même distance focale.

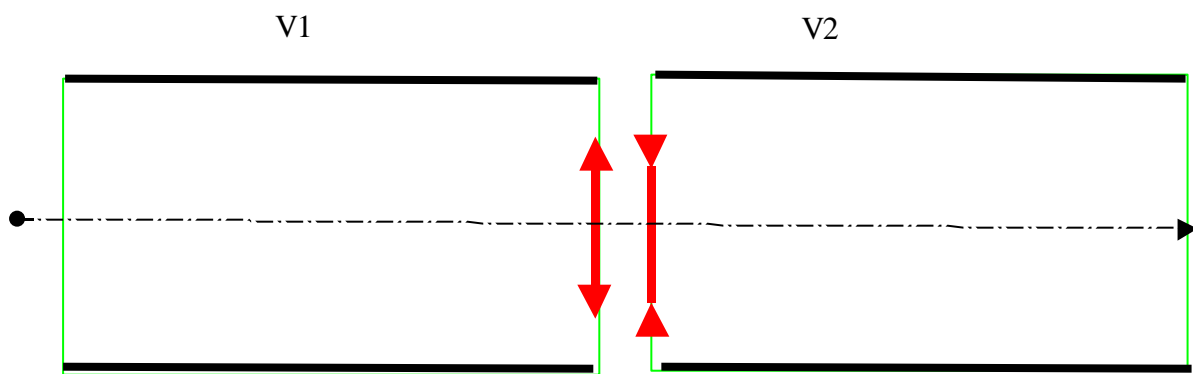


Figure 13a

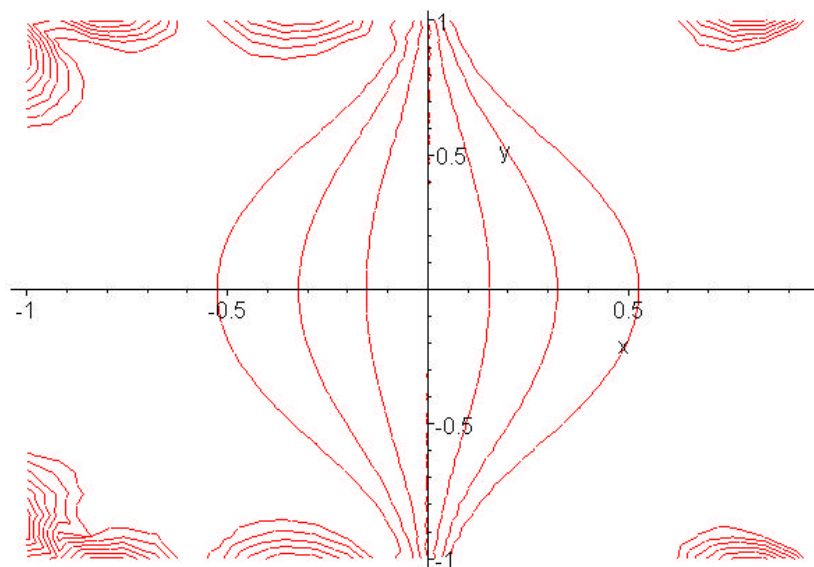


Figure 13b : potentiel (ne pas tenir compte des tortillons au voisinage des électrodes, qui proviennent d'un calcul approximatif)

Dans la pratique, on trouvera souvent une structure où les tubes extrêmes sont à la masse et le tube médian à la haute tension (figure 13c).

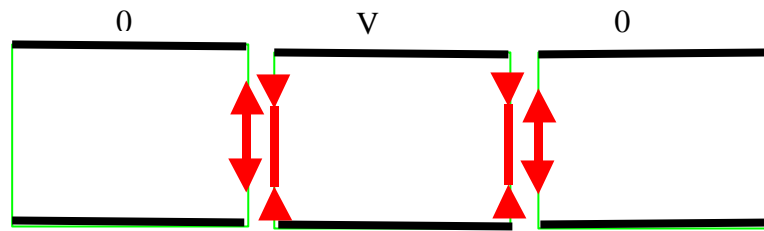


Figure 13c

### Commentaires

- L'effet global est toujours convergent dans chaque gap d'après la propriété donnée en 3.1.
- Ceci est également vrai si la lentille est décélératrice.
- Pour produire un champ transverse donné, il faut un champ longitudinal élevé (les équipotentielles restent peu courbées). Une telle lentille demande donc des tensions élevées. Pour un faisceau monochargé de 30 keV (notre exemple), il faut environ 30 kV. Grosso modo et uniquement pour donner un ordre de grandeur, la tension à appliquer est voisine de la tension sous laquelle le faisceau a été accéléré. L'état de charge n'intervient donc pas. Une lentille de ce type est donc efficace à basse énergie. A haute énergie, on privilégiera la focalisation magnétique.
- Une lentille décélératrice est à tension égale plus forte qu'une accélératrice, par contre l'émittance augmente et donc la taille du faisceau. Si le faisceau est trop ralenti, on peut avoir des problèmes de « charge d'espace » si son intensité est trop grande (répulsion coulombienne du faisceau sur lui-même).
- La lentille est dans la chambre à vide (aspects de dimension et de pompage). On ne saurait trop insister sur les aspects de propreté comme la chasse aux hydrocarbures (attention aux pompes utilisées).
- La focalisation est, pour une lentille cylindrique, identique en horizontal et en vertical. On peut remplacer les cylindres par des plaques et ne focaliser que dans une direction, mais le principe est identique.
- Une lentille plane est à tension identique plus forte qu'une lentille cylindrique (les équipotentielles sont plus facilement tordues quand elles doivent passer dans une fente plutôt qu'un trou).
- L'ouverture utilisable est d'environ la demi ouverture mécanique car au-delà on déforme le faisceau (non-linéarités ou aberrations). Encore une fois, il s'agit d'un ordre d'idées : les déformations croissent avec la force (vergence) de la lentille.
- Il n'y a pas de formule simple donnant la distance focale.

Nous donnons figure 14 la photo d'une telle lentille, associées à des quadripôles électrostatiques (voir plus bas).



Figure 14 : Lentilles et quadripôles électrostatiques

### *6.2 Pôles : définitions et remarques diverses.*

Nous avons vu l'inconvénient d'avoir un champ longitudinal parmi les composantes de focalisation. Nous allons donc chercher à voir un champ transverse. Un champ ayant de manière évidente « deux extrémités », nous ne pourrions avoir que des structures à nombre pair de pôles. Un pôle est positif ou négatif (structures électrostatiques) ou Nord ou Sud (magnétisme).

**Dipôle** : Deux pôles opposés. Ils provoquent une déflexion dans le sens du champ si celui-ci est électrique et perpendiculaire au plan (vitesse, champ) s'il est magnétique. Un champ magnétique n'a aucune action sur une particule au repos. Un champ électrique a toujours une action. Voir le chapitre 5.

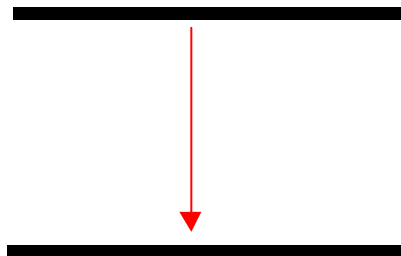


Figure 15 : dipôle.

**Quadripôle** : Quatre pôles que nous supposerons alternés, pour la focalisation (voir plus bas).

*Remarque : on dit un quadrimoteur, mais un quadrupède et pas l'inverse, un quadriceps etc. C'est un débat sans solution et selon nous aussi stérile que la quadrature du cercle. Référence bibliographique : Achille Talon et le quadrumane optimiste (Dargaud).*

**Sextupôles** ou **hexapôles** : Six pôles que nous supposerons alternés. Ce sont des éléments non-linéaires. Parmi les applications : correction de chromaticité (c'est-à-dire de la dépendance de la progression de phase en fonction de l'énergie), excitation d'instabilités pour l'extraction de faisceau dans les synchrotrons, etc.

Citons également octupôles, décapôles, dodécapôles etc.

### 6.3 Quadripôle électrostatique

Le champ transverse pur le plus simple qui permette de réaliser une lentille est le quadripôle. La figure 16 représente un quadripôle électrostatique. L'axe du faisceau passe par l'origine des coordonnées (x/y) et est perpendiculaire à la feuille.

Les électrodes (zones pleines) sont portées au potentiel  $\pm\Delta V$  par rapport à l'axe. Les pôles opposés sont de même polarité.

Les électrodes idéalisées sont à profil hyperbolique (dans la pratique on peut les réaliser avec des cercles).

Les lignes de champ électriques sont tracées et correspondent aux lignes de force.

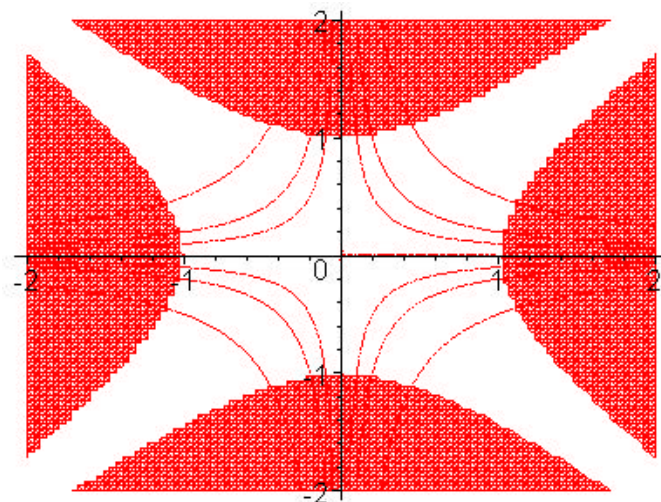


Figure 16 : Quadripôle électrostatique en coupe (x/y). Attention ! Les lignes de champ électrique ne pénètrent pas dans le conducteur (il s'agit ici d'un artefact dû au système de calcul utilisé ici)

*Commentaires*

- Si le profil des électrodes est bien hyperbolique (et infini), on montre que la force est exactement proportionnelle à la position dans chaque plan.
- L'examen des lignes de champ montre que si la force ramène vers l'axe selon une direction, elle l'en éloigne selon l'autre. Un quadripôle est donc convergent dans une direction et divergent dans l'autre.
- L'association successive de quadripôles pour une ligne de transport doit donc être alternée, comme c'est le cas de notre ligne FODO.
- Il ne préserve pas la symétrie de révolution. Un faisceau rond ressort elliptique.
- On montre qu'un quadripôle de longueur L est équivalent, avec une grande précision, à une lentille mince entourée de deux espaces sans champ de longueur L/2 (la longueur totale ne doit bien sûr pas changer). Cette lentille (convergente dans un plan et divergente dans l'autre) a sa distance focale (identique dans les deux plans) donnée par (cas non relativiste):

$$\frac{1}{f} = \frac{L\Delta V}{R^2 V} = \frac{nL\Delta V}{R^2 T}$$

où R est le rayon de gorge,  $\Delta V$  le potentiel des pôles, V la tension d'accélération, T l'énergie cinétique totale et n l'état de charge.

- Si les particules ont été accélérées par une même différence de potentiel, la distance focale est indépendante de leur état de charge (exemple des ions de charge diverse et de même masse issus d'une même source).
- Pour un quadripôle électrostatique, à distance focale égale, la tension à appliquer varie comme le carré du rayon.
- La distance focale est Le champ est transverse par construction. Pour un faisceau monochargé de 30 keV il faut environ 100 V pour (L=0.2 m, R=20mm) pour 60 cm de distance focale.
- Nous supposons que le quadripôle est long par rapport à son ouverture. En fait, la longueur efficace est la longueur totale diminuée d'un demi rayon environ (ordre d'idée uniquement).
- Il est placé dans la chambre à vide.
- L'ouverture utilisable est quasiment l'ouverture totale.

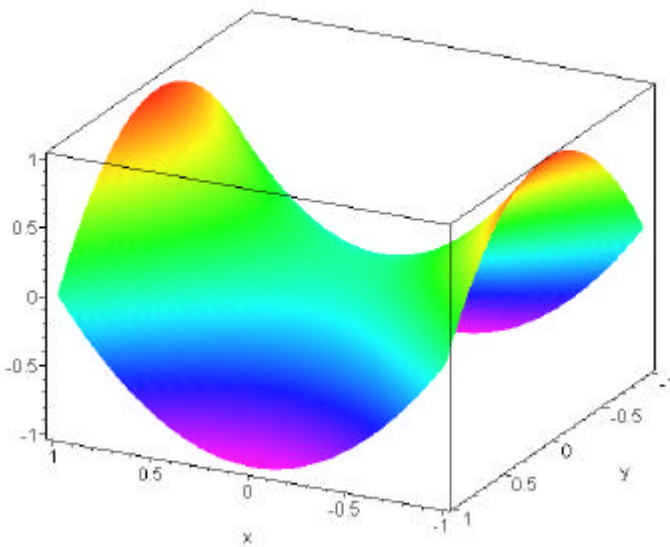


Figure 17 : potentiel dans le quadripôle. L'axe faisceau est l'axe vertical. Les équipotentielles sont les hyperboles de même couleur.

*Remarque* : les éléments électrostatiques sont des éléments faciles à réaliser en interne, et très utiles au voisinage des parties basse énergie comme les sources d'ions. Ils sont bien sûr inopérants à haute énergie.

#### 6.4 Quadripôle magnétique

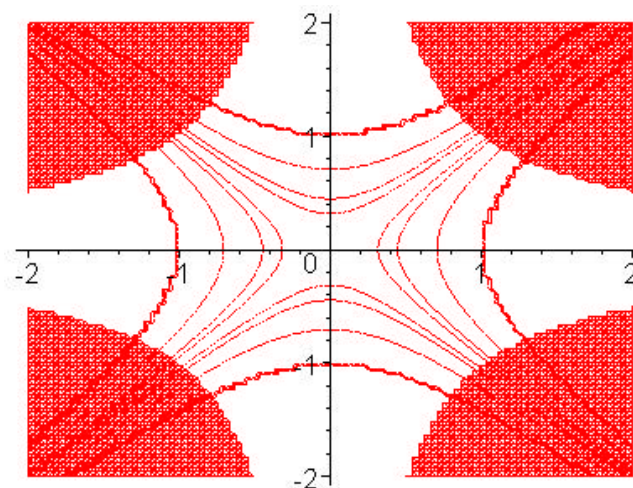


Figure 18 : pôles et lignes de champ d'un quadripôle magnétique

Le principe est analogue au cas électrostatique, à ceci près que la règle des trois doigts de la main droite complique les choses.



*Règle des trois doigts:* pour une particule de charge positive, de vitesse orientée selon le pouce dans un champ magnétique orienté selon l'index, la force est orientée selon le médium.

*Commentaires :*

- Il possède les mêmes propriétés qu'un quadripôle électrostatique, à ce qui suit près.
- Les pôles sont tournés de 45 degrés.
- La distance focale est donnée en fonction de la rigidité magnétique du faisceau par :

$$\frac{1}{f} = \frac{B_0 L}{R(Br)} = \frac{gL}{(Br)}$$

$B_0$  est le champ sur le pôle au niveau du cercle de gorge,  $g=B_0/R$  est appelé le gradient magnétique.

- Il peut être placé à l'extérieur de la chambre à vide.
- La force magnétique devenant beaucoup plus grande que la force électrique quand l'énergie croît, on ne trouve que des quadripôles magnétiques dans les grandes machines.

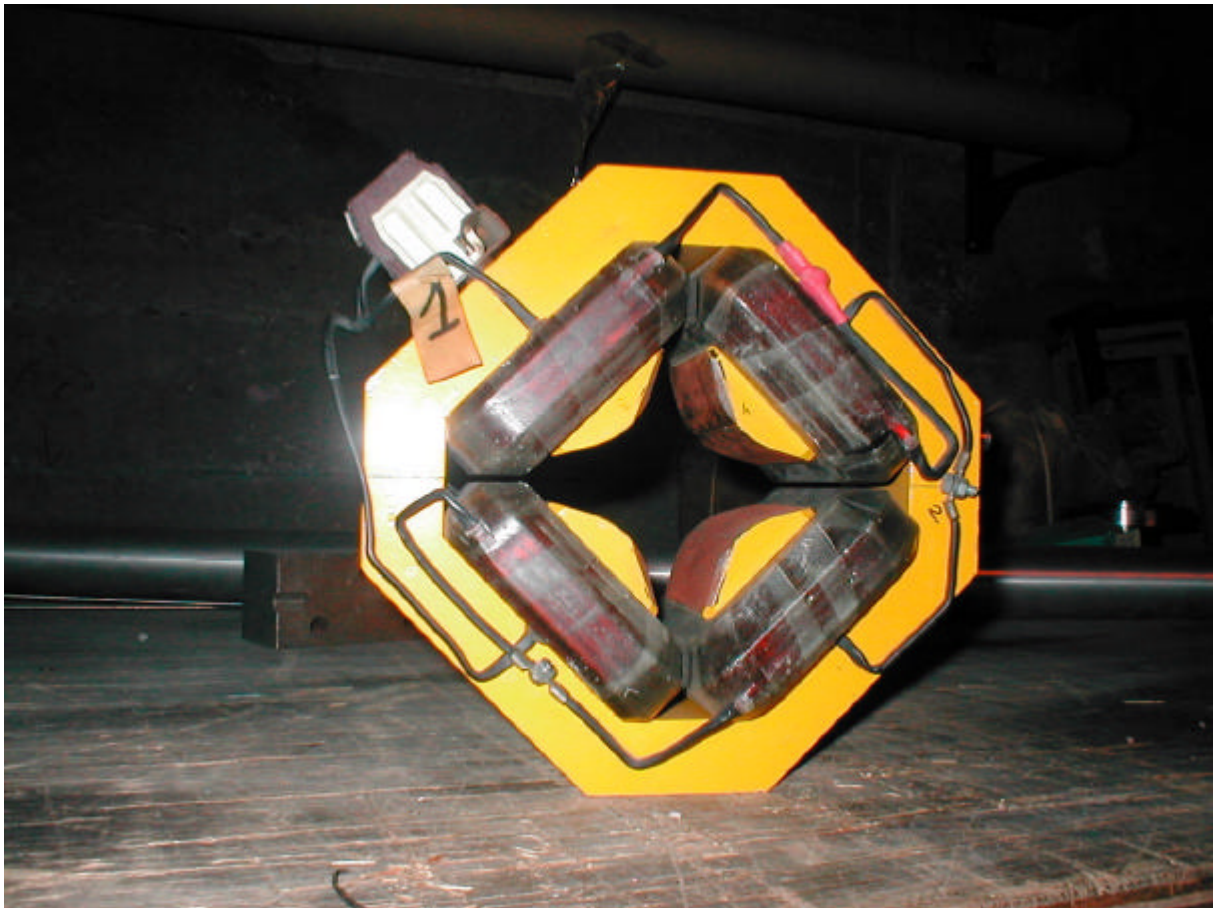


Figure 19 : Photographie d'un quadripôle magnétique

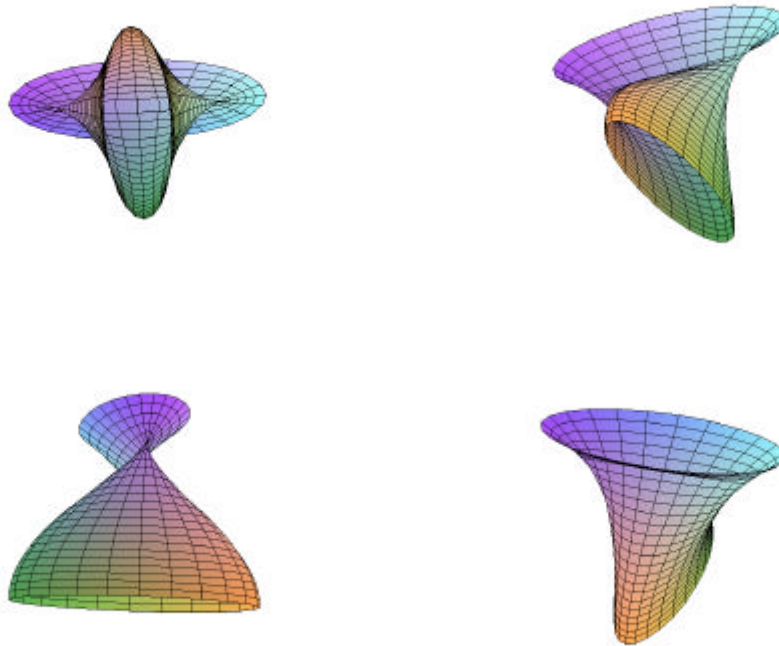


Figure 20 : Illustration des trajectoires dans un quadripôle supposé infiniment long, vues selon différents angles. Le faisceau de départ est d'émittance nulle, de section circulaire et parallèle.

### 6.5 Quelques propriétés

- Un quadripôle est équivalent, avec une grande précision, à une lentille mince entourée de deux espaces sans champ de longueur  $L/2$  (la longueur totale ne doit bien sûr pas changer).
- Un doublet de quadripôles est très différent d'une lentille mince. Il est en fait équivalent à une lentille épaisse et, qui plus est, décalée.
- Un triplet symétrique de quadripôles est également équivalent à une lentille mince.

Ces trois remarques très simples sont très utiles quand on veut analyser ou modéliser un système.

### 6.6 Un exemple moins classique

La figure 21 montre le dessin d'un quadripôle magnétique sans fer, et donc sans pôles, que nous avons proposé pour notre ligne de transfert. Le



champ est créé par des conducteurs de section  $80 \times 15 \text{ mm}^2$  parcourus par un courant de 1500 ampères.

- Le champ est modeste (0.15 T) mais suffisant pour une distance d'environ 100mm entre conducteurs opposés.
- La construction est simple et économique (cuivre et composite type Permali®).
- L'axe magnétique est bien défini, car il est défini à l'aide de pions uniquement (pas d'incertitude par exemple sur les bobines).
- Le champ n'est pas très linéaire, et la force n'est pas rigoureusement proportionnelle à la position, mais ceci peut être suffisant pour un simple transport.

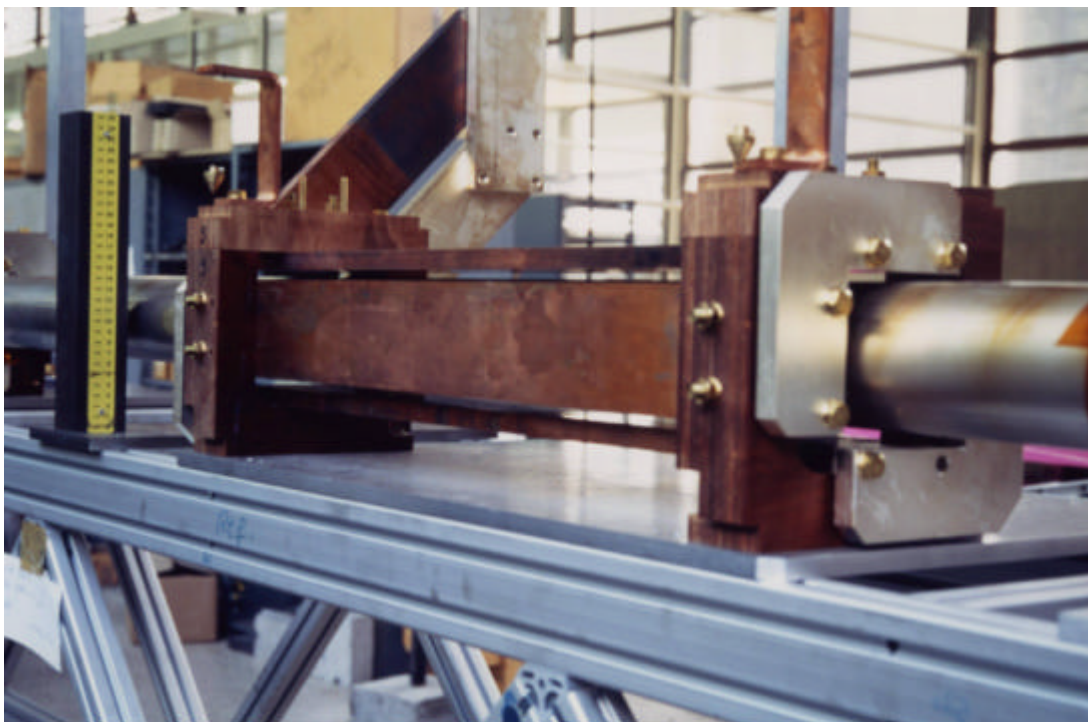


Figure 21 : Quadripôle magnétique sans fer.

#### *6.7 Solénoïde, lentille Glaser (pour mémoire).*

Un solénoïde est également un élément de focalisation. Considérons une particule qui arrive parallèle à l'axe. Elle rencontre le champ de fuite du solénoïde qui a une composante transverse. Cette dernière donne une composante de vitesse transverse. Globalement, le passage du faisceau dans le solénoïde se traduit par une rotation autour de l'axe et une focalisation. On observe un couplage entre  $x$  et  $y$  à cause de la rotation. Ce type de lentille est toujours convergent dans les deux directions et possède bien sûr la symétrie de révolution. Elle est, à champ égal, moins forte qu'un quadripôle car on n'exploite que le champ de fuite (entre guillemets). Ces lentilles sont entre autres utilisées dans les microscopes électroniques. Elles possèdent très peu d'aberrations.

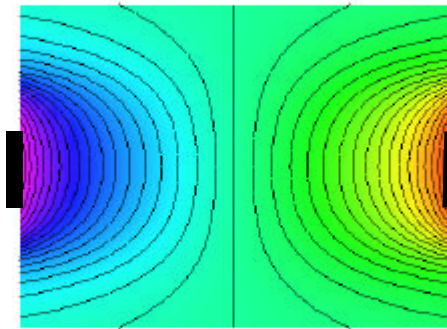


Figure 22 : champ magnétique dans un solénoïde. Les grosses barres noires représentent la bobine. Le lecteur nous pardonnera le dessin de qualité médiocre. Les couleurs sont là pour faire joli.

## ***7 La déviation des particules***

Nous n'avons jusqu'à lors considéré que la trajectoire en ligne droite et les éléments de focalisation. Voyons maintenant les éléments de déflexion.

### *7.1 Dipôle magnétique. Indice de champ.*

La figure 23a représente un dipôle et la figure 23b représente très schématiquement un secteur magnétique, vu de dessus (à gauche) et vu de profil (à droite).

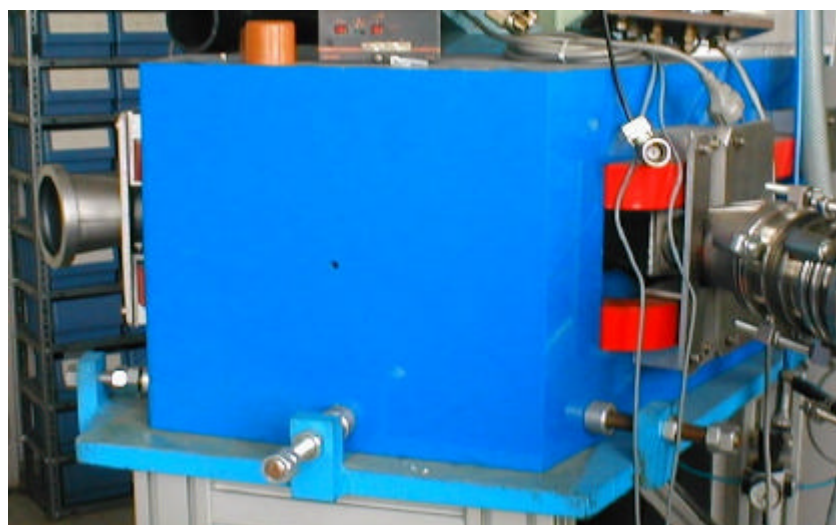


Figure 23a : dipôle magnétique

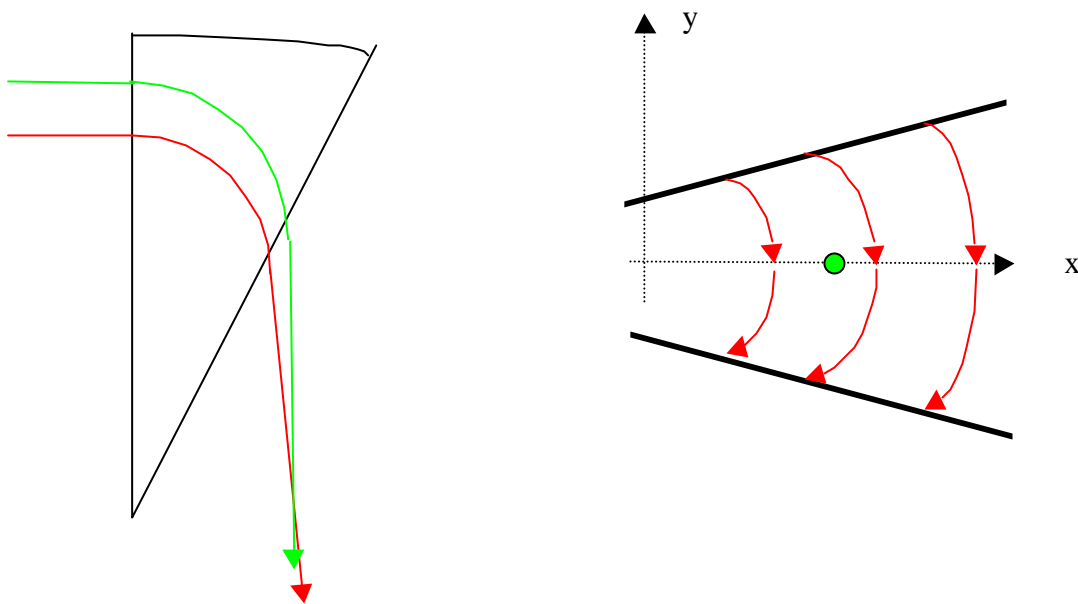


Figure 23b : Dipôle magnétique (illustration)

Considérons la partie droite de la figure. Les lignes de champ sont en rouge. On a dessiné une particule de référence en vert sur le plan médian du dipôle. Elle voit un champ magnétique vertical d'intensité  $B$  selon  $y$  et elle tourne dans le plan médian sur un cercle de rayon :

$$R = \frac{(Br)}{B}$$

Si les pôles sont parallèles,  $B$  ne varie pas avec  $x$ . Sinon (cas de la figure), il varie. On caractérise cette variation par la quantité sans unité :

$$n = \frac{B}{R} \frac{\partial B}{\partial x} = - \frac{B}{R} \frac{\partial B}{\partial y}$$

$n$  est appelé indice de champ. La seconde égalité vient des propriétés du champ magnétique (« divergence nulle »).

Nous avons représenté sur la partie gauche de la figure deux trajectoires qui arrivent parallèles et, supposons le, dans le plan médian (champ purement vertical). Les trajectoires sont des cercles de même rayon mais de centres décalés. Ceci entraîne la convergence des deux trajectoires.

- **Propriété** : Un dipôle magnétique a un effet focalisant convergent dans le plan de déviation. Ceci est un effet purement géométrique.

**Effet de l'indice** : Un indice non nul entraîne une composante horizontale non nulle en dehors du plan médian, et donc un effet dans le plan vertical (toujours à cause de la règle des trois doigts de la main droite, à ne pas confondre avec celle du défaut de l'épaule gauche chère à Marcel Pagnol).

- *Propriété* : un indice nul entraîne que la trajectoire dans le plan vertical (ou plus le plan où l'on ne dévie pas) est celle dans un espace sans champ.
- *Propriété* : un indice non nul entraîne un effet focalisant ou défocalisant, selon le signe de l'indice, dans le plan qui n'est pas celui de déviation. Il subsiste un effet focalisant dans le plan de déviation mais amoindri.

## 7.2 Focalisation par les faces

Supposons que notre secteur dessiné figure 23 n'ait pas sa face d'entrée perpendiculaire à l'axe du faisceau (figure 24) :

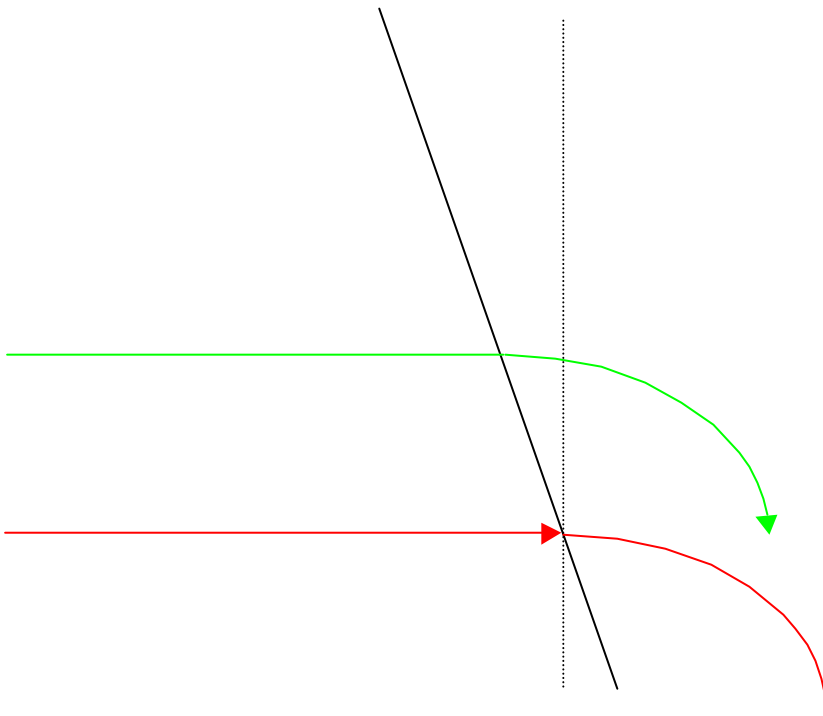


Figure 24 : Focalisation par les faces ou « edge focusing ».

- La particule de référence est en rouge. Le trait plein est le bord du pôle vu de dessus. Le trait pointillé est la perpendiculaire à la trajectoire de référence en son point d'entrée dans le champ (on suppose qu'il n'y a pas de champ de fuite).
  - La particule de référence suit une trajectoire circulaire dans le dipôle.
  - Une particule voisine mais décalée entre plus tôt dans le champ. Elle commence donc à tourner plus tôt ce qui rajoute un effet focalisant.
- Si nous avions dessiné la face de l'autre côté de la perpendiculaire, on aurait eu un effet défocalisant.

- *Propriété* : La focalisation par une face est voisine de l'effet d'une lentille mince, convergente ou divergente selon les cas de figure, dont la distance focale est donnée en valeur absolue par (approximativement):

$$\bullet \quad \left| \frac{1}{f} \right| = \frac{\tan(\phi)}{R}$$

où  $\phi$  est l'angle entre la face et la perpendiculaire.

- *Propriété* : un effet de face focalisant dans le plan de déviation donne un effet défocalisant dans l'autre plan (idem défocalisant entraîne focalisant). Les distances focales sont identiques au premier ordre.
- *Propriété* : Si l'angle d'entrée  $\phi_e$  est égal à celui de sortie  $\phi_s$  et égal au quart de l'angle de déviation  $\theta$ , de façon à avoir un effet focalisant dans le plan de déviation, alors le dipôle est convergent identiquement dans les deux plans. Ceci n'est bien sûr vrai qu'au premier ordre.

*Remarque* : un dipôle n'a pas obligatoirement la forme d'un secteur d'angle égal à celui de déviation (cas où l'on doit se placer pour avoir une focalisation par face nulle). Ainsi on peut avoir des aimants rectangulaires, attaqués avec un certain angle.

*Nota* : nous avons totalement négligé l'effet des champs de fuite.

### 7.3 Déflecteur électrostatique (pour mémoire)

Nous avons représenté un tel déflecteur figure 25. Il est constitué, ici, de deux portions de cylindres entre lesquelles règne un champ électrique transverse qui défléchit les particules, ici de 180 degrés. Pour qualifier la trajectoire centrale, il suffit d'égaliser force électrique et force centrifuge. La forme des électrodes est au choix du concepteur et fonction des besoins. Ici, on n'a déflexion et focalisation que dans le plan de déviation. On aurait pu prendre deux portions de sphère (figure 26) pour focaliser dans les deux plans, voire des formes plus compliquées comme des portions de tore etc. Les propriétés d'analyse sont données en 7.4.



Figure 25 : Déflecteur cylindrique

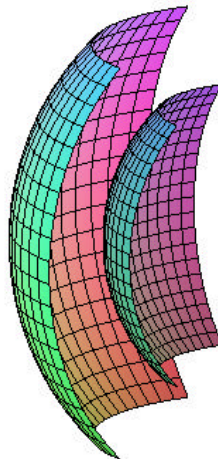


Figure 26 : Déflecteur sphérique

#### 7.4 Séparation. Notions de dispersion. Spectromètre.

L'expression de la rigidité magnétique montre que celle-ci ne dépend que de la quantité de mouvement et de la charge, d'où cette importante propriété :

- Deux particules de trajectoires initialement confondues seront séparées dans un champ magnétique si et seulement si leurs rigidités magnétiques  $q/mv$  sont différentes.
- De même, deux particules de même charge de trajectoires initialement confondues seront séparées dans un champ électrique si et seulement si leurs valeurs de  $q/T$  sont différentes.

On peut très bien avoir au sein du même faisceau, des particules différentes mais de caractéristiques électriques ou magnétiques identiques. Par contre, ce « ou » est exclusif : on ne peut avoir les deux propriétés en même temps.

Un dipôle magnétique ou un déflecteur électrostatique peut être utilisé pour cela, bien au-delà de la simple déviation.

Un **spectromètre** est un dispositif servant à séparer les particules selon une certaine caractéristique. Par exemple, nous citerons la datation par carbone 14, qui doit isoler le carbone 14 des autres éléments. Un tel système comporte en général une déflexion électrostatique (tri en énergie) et une déflexion magnétique (tri en quantité de mouvement) pour éliminer les cas où énergie ou quantité de mouvement coïncident alors que les espèces sont différentes.

**Dispersion magnétique** : Considérons deux particules initialement confondues (trajectoire, vitesse) mais de rigidités différentes. Si ces deux particules pénètrent dans un champ magnétique, elles se séparent. Si rien n'est fait (figure 27), elles vont avoir chacune leur propre évolution. Par définition, la dispersion magnétique est la trajectoire  $D(s)$  d'une particule telle que  $\Delta p/p = 100\%$  (dans le cadre linéaire).

##### **Achromatisme :**

Si l'on conçoit astucieusement une optique (figure 28), avec (ici) une lentille convergente telle que

- la dispersion soit symétrique de part et d'autre de la lentille, d'une part,
- Le système soit optiquement symétrique en plaçant un dipôle identique au premier d'autre part,

alors les trajectoires se regroupent par raison de symétrie. On a obtenu un système *achromatique*.

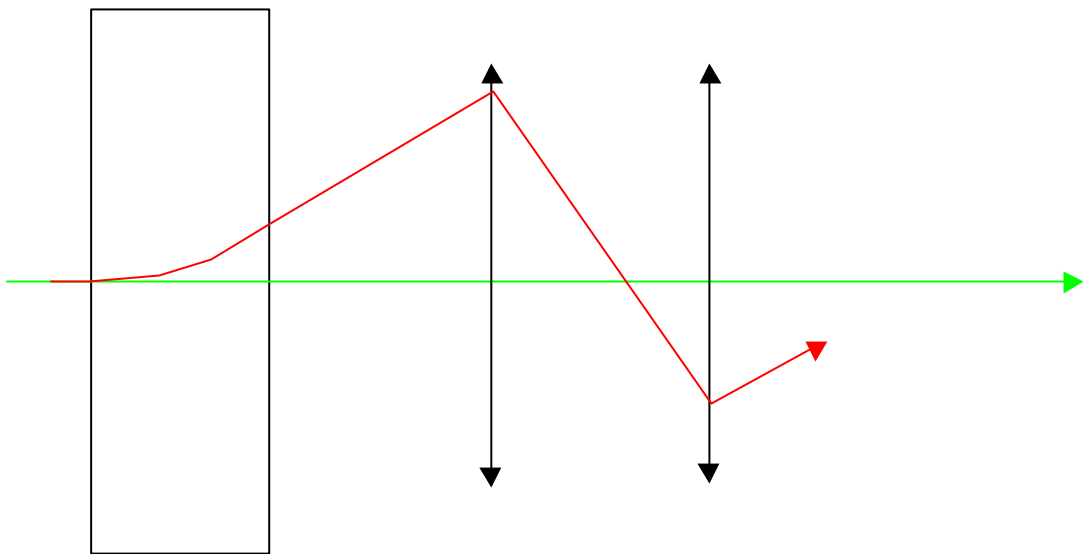


Figure 27 : séparation dans un dipôle et évolution dans l'optique qui suit.

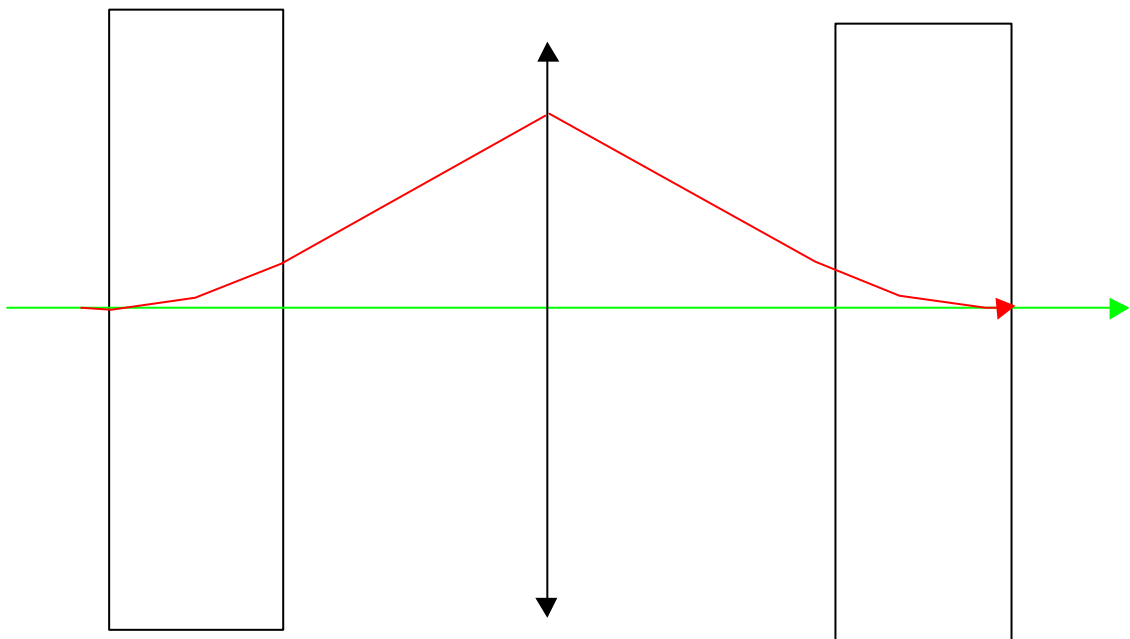


Figure 28 : système achromatique

*Nota* : ceci n'est qu'un exemple illustratif facile à comprendre. Il n'est pas nécessaire d'avoir un système symétrique.



*Remarque importante* : la dispersion est créée par un système dispersif (jusque là c'est une lapalissade). Il faut donc obligatoirement un autre système dispersif de compensation pour avoir achromatisme. On n'y arrive pas avec des lentilles seules (bien que, il est vrai, la distance focale varie avec la quantité de mouvement).

*Autre remarque* : Au premier ordre, les distances focales seront considérées comme indépendantes de la rigidité (ou de l'énergie), et les particules séparées seront traitées, de ce point de vue, comme les autres, avec simplement un terme de position supplémentaire (ajouté) et proportionnel à  $\Delta p/p$ .

En fait :

$$x(s) = x_0(s) + D(s) \frac{\Delta p}{p_0}$$

Où  $x_0$  est la trajectoire si  $\Delta p/p$  était égal à zéro.

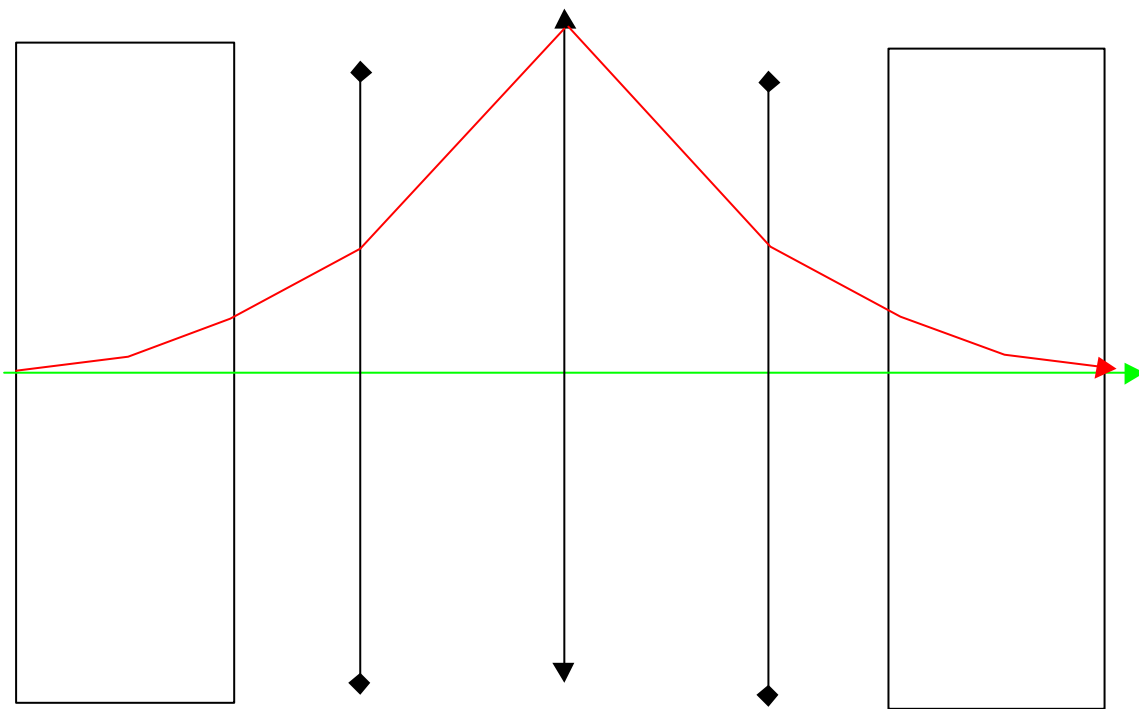


Figure 29 : Si l'on travaille avec des quadripôles, on ne peut avoir convergence dans les deux plans. On utilise alors symétriquement trois quadripôles, ce que l'on sait être équivalent à une lentille mince, pour assurer la focalisation dans les deux plans et retrouver un équivalent à la figure 28 (ce n'est qu'un exemple de plus). Ici, les carrés indiquent les quadripôles divergents.

## 7.5 Chromaticité

Dans un anneau de stockage (par exemple), la particule de référence effectue un certain nombre d'oscillations  $\nu$  par tour. Si la particule étudiée a  $\Delta p/p$  non nul, la distance focale des éléments varie quelque peu et, au premier ordre, proportionnellement. Cette dépendance s'appelle la chromaticité et s'écrit (c'est une définition possible):

$$\chi = \frac{d\mathbf{u}/\mathbf{u}}{dp/p_0} = \frac{p_0}{\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dp}$$

## 8 Thèmes couverts en annexe et conclusion

Nous avons illustré (ou essayé) notre propos par le biais d'un problème concret. Ceci concerne une structure idéale. Nous donnons en annexe, sous forme de fiches de synthèse, quelques problèmes qui doivent être impérativement résolus (nous donnons en fait le problème, sa formulation et enfin sa solution). Il n'est pas concevable de traiter chaque point dans le cadre de ce cours.

Il s'agira de :

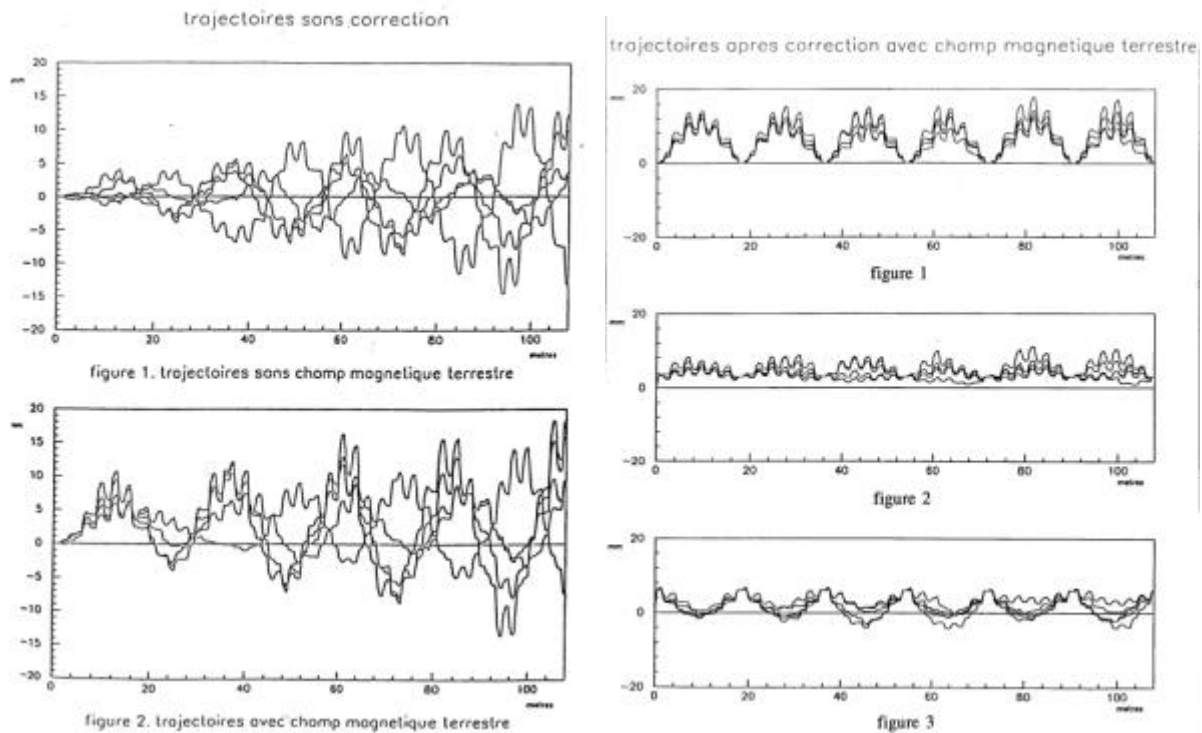
- L'effet des défauts d'alignement : définition des tolérances
- Mesure du centre d'un quadripôle par bobine tournante. Résultats de PIAFE
- Un exemple de méthode d'alignement (niveau+fil tendu)
- Le champ magnétique terrestre (gênant dans notre exemple)
- L'effet d'un vide insuffisant (diffusion, échange de charge). Mesures de PIAFE

Nous avons essayé de décrire le vaste panorama de l'optique des particules chargées et nous avons tenté de laisser un document lisible. Nous n'avons cependant pas donné tout ce qui est nécessaire au calcul concret de la structure, mais simplement ce qui permet de la comprendre.

Nous espérons que le lecteur/auditeur aura également compris qu'il s'agit là d'une discipline fort passionnante, qui puise dans les aspects théoriques et les aspects pratiques et qui peut plaire à tous les goûts. Indiquons enfin que la dynamique des particules est un aspect de la physique à part entière, et que de nombreux problèmes n'ont rien à envier aux sujets plus à la mode (on ne sait d'ailleurs pas les résoudre).

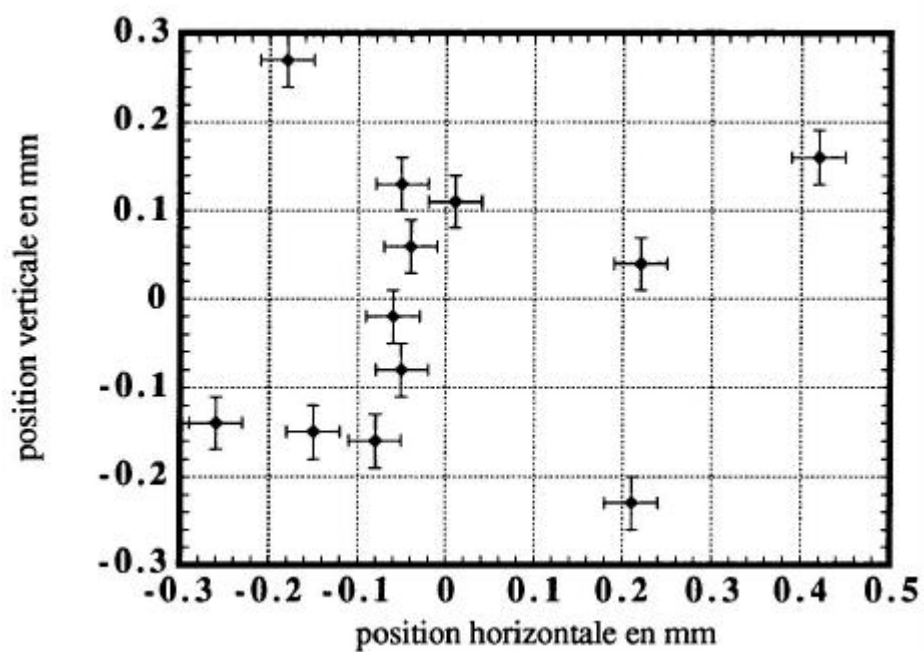
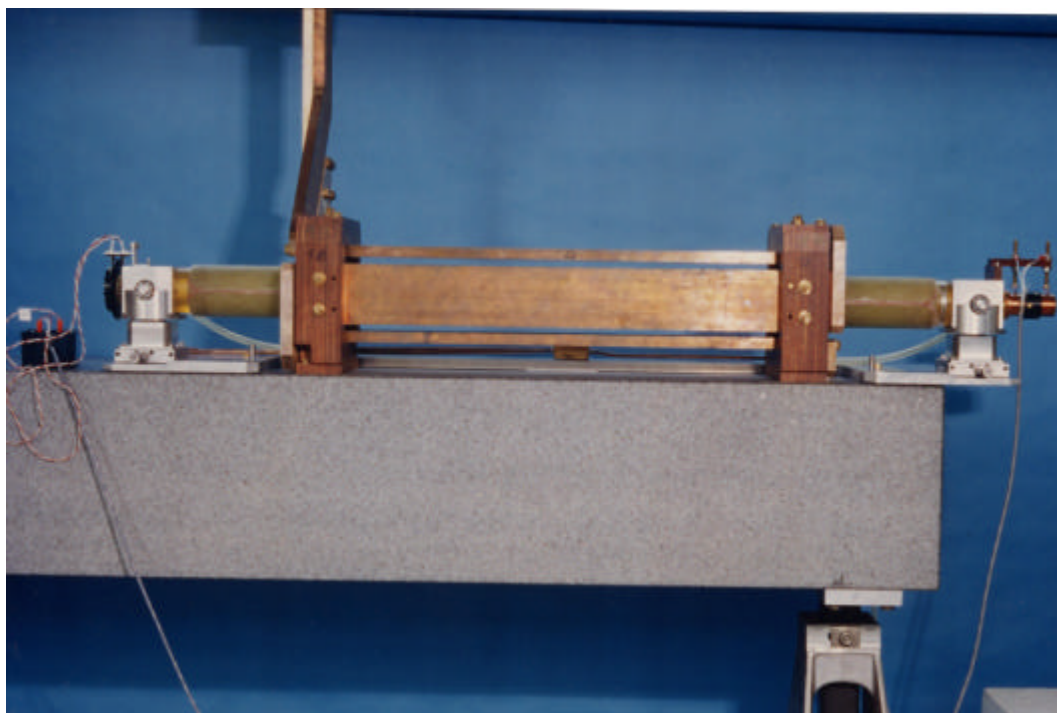
Le puriste nous pardonnera quelques approximations qui nous ont paru nécessaires pour simplifier le discours.

## **Fiche 1 : Effet des défauts d'alignement sur les trajectoires dans la structure PIAFE**



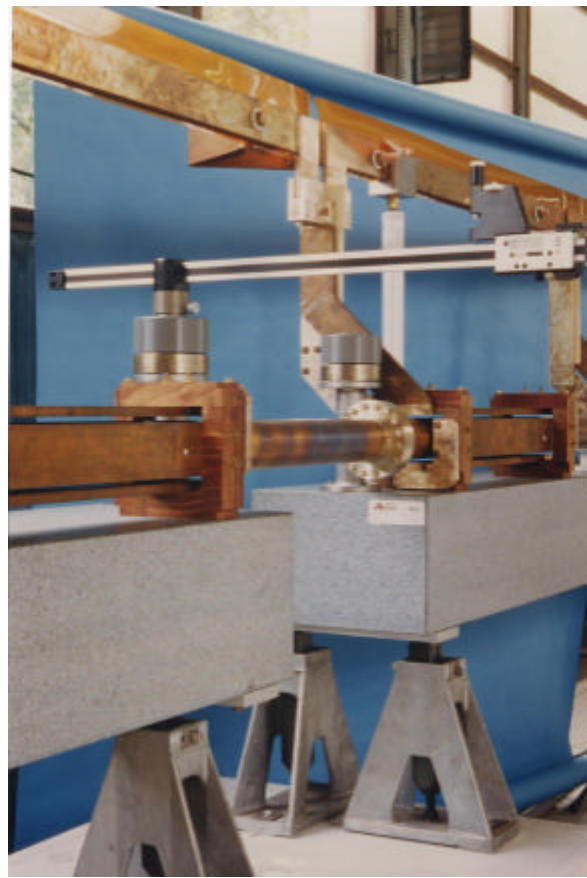
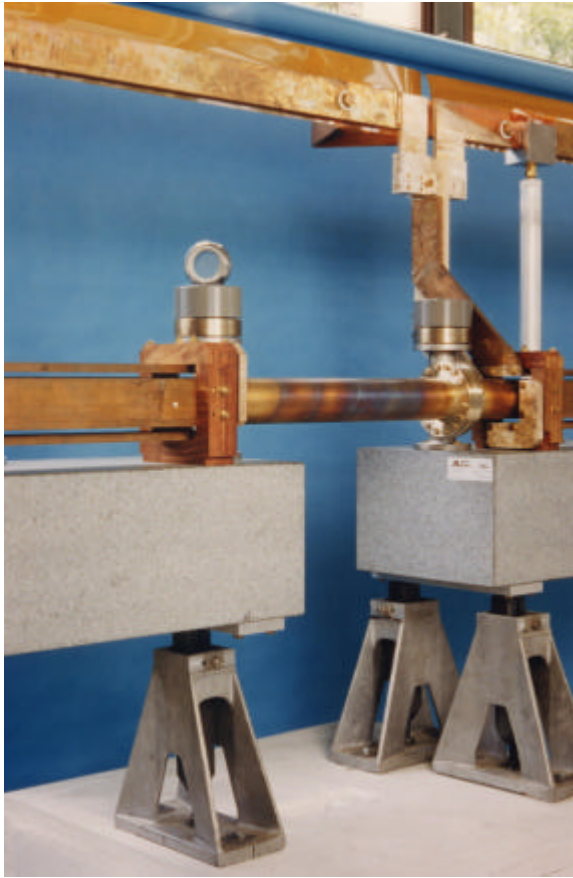
- A gauche : trajectoire centrale pour différentes valeurs des désalignements des quadripôles.
- L'excentration moyenne définit la tolérance d'alignement (ici  $\pm 0.5\text{mm}$  maximum).
- La mesure de la position du faisceau associée à des correcteurs de trajectoires (petits dipôles magnétiques ou « steerers ») donne les figures de droite (différents schémas).
- Faible rigidité magnétique : le faisceau est affecté même par le faible champ terrestre qui est donc pris en compte. Ceci donne le décalage latéral des figures de droite.

**Fiche 2 : Alignement phase1 - Mesure du centre magnétique des quadripôles.**

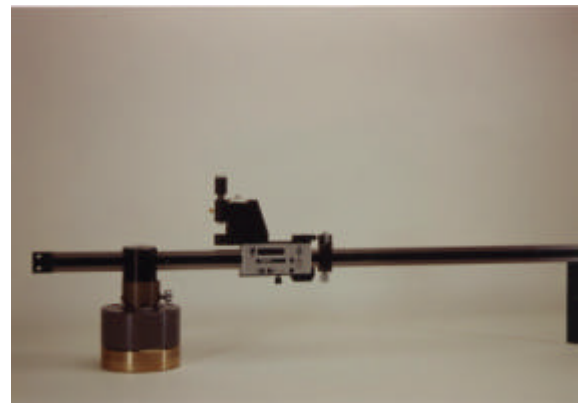
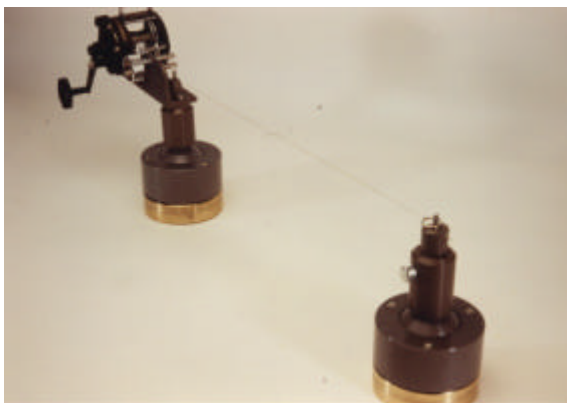


- Une bobine tournante insérée dans le quadripôle donne un signal d'amplitude proportionnelle au décentrement (sur sa fréquence fondamentale).
- On déduit les positions sur la seconde figure. On est largement dans les tolérances de  $\pm 0.5$  mm.

### ***Fiche3 : Alignement phase2 – Alignement de la structure***



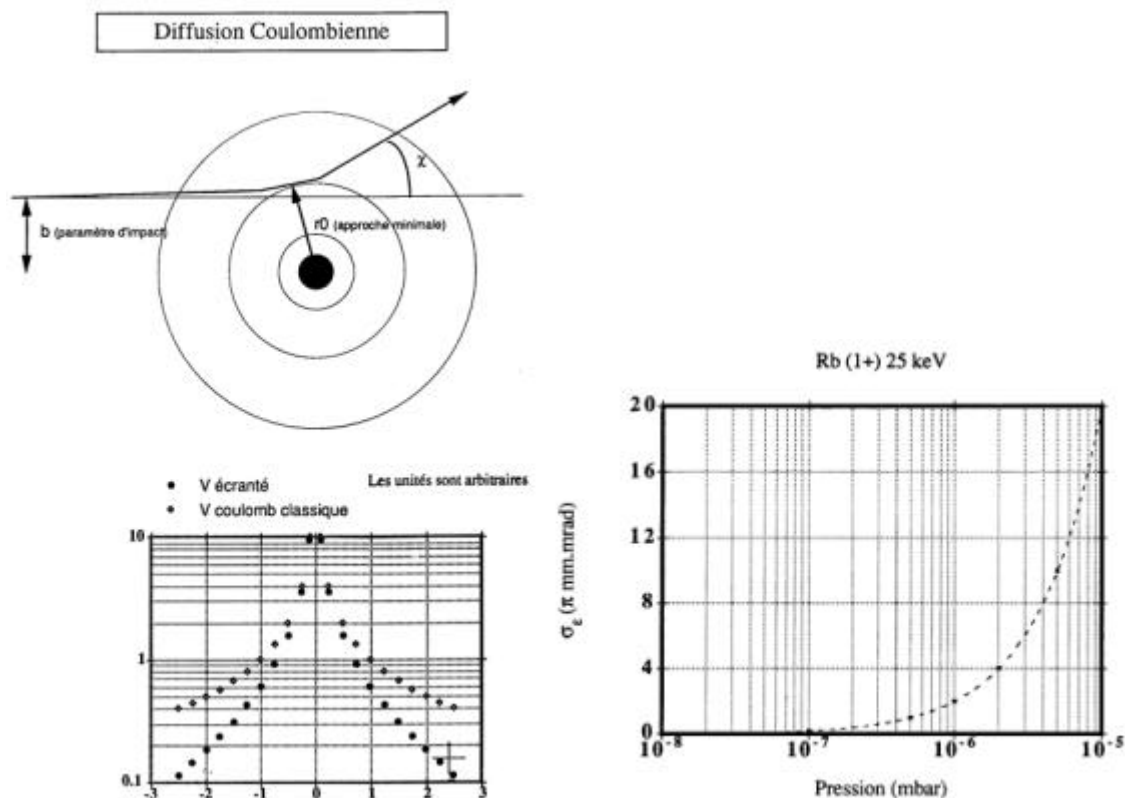
Vertical : Sphère Taylor-Hobson et support sphérique + lunette  
Horizontal : Fil tendu et écartomètre LEP inséré dans les mêmes supports.  
Ajustement : 3 pieds ajustables par poutre de granit (pieds LEP).



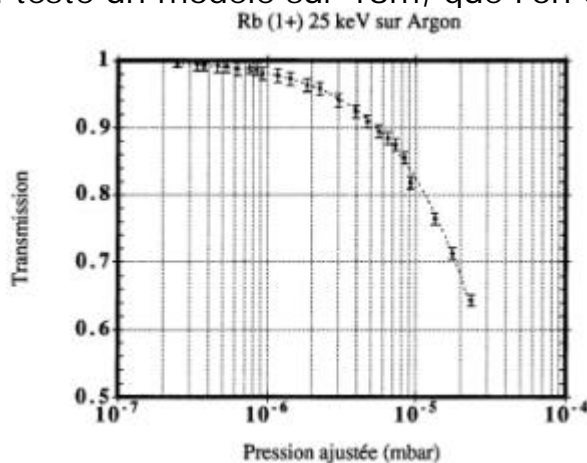
Ecartomètre : le fil tendu et la pêche au gros (à gauche) et l'écartomètre à droite.

Techniques CERN .

## Fiche 4 : L'effet du gaz résiduel et la définition de la pression requise.



- La diffusion entraîne un grossissement d'émittance.
- A gauche, un modèle analytique a été développé.
- A droite, mesures sur faisceau réel. Théorie et pratique se sont avérés cohérents. Les deux sont indispensables pour la compréhension et la vérification. Cette conjonction est requise pour pouvoir extrapoler sur grande distance (400 mètres) à partir de 18 m.
- L'interaction faisceau-gaz change la charge des ions (« échange de charge ») et ces derniers sont perdus. La figure ci-dessous donne la transmission en fonction de la pression dans la chambre à vide remplie d'un gaz test (ici l'argon). La loi est exponentielle. Ici aussi, on développe et on teste un modèle sur 18m, que l'on extrapole à 400.





La ligne expérimentale en cours de construction (3 poutres granit de 6m chacune)

